Proclo e la conoscenza matematica

PROLOGO

PARTE PRIMA

L'essere matematico, fra le cose esistenti, necessariamente non è né dei generi primi, né degli ultimi e più lontani dalla semplicità; ma occupa una posizione intermedia tra le realtà sostanziali non ripartite — semplici, non composte, indivisibili, — e quelle ripartite e distribuite in molteplici combinazioni e ripartizioni svariate. Perché il fatto di esser sempre allo stesso modo, e stabile, e irrefutabile nei ragionamenti che lo riguardano, lo dimostra superiore alle forme transeunti nella materia; mentre l'estendersi delle sue applicazioni e il valersi delle dimensioni dei suoi oggetti e il precostituirsi altri oggetti con altri principii, gli assegnano un grado inferiore a ciò che è di natura non ripartita e perfettamente fondata in se stessa. È questa, io credo, la ragione per cui Platone distribuiva la conoscenza delle cose esistenti tra le sostanze prime, le intermedie e le ultime [1]; e alle indivise attribuiva la conoscenza intellettuale, che discerne le cose intelligibili semplicemente nel loro insieme, e sopravanza le altre conoscenze per immaterialità e purezza, in unitaria appercezione e contatto con le cose esistenti; alle sostanze ripartite, che hanno in sorte la più bassa natura, e a tutti gli oggetti del senso, attribuiva la opinione, che si appropria di una verità malsicura; alle intermedie infine, quali sono le specie della matematica, inferiori alla natura indivisibile, ma poste al di sopra della divisibile, attribuiva la conoscenza ragionata [2]. Questa è, di fatto, seconda rispetto all'Intelletto e alla somma sapienza, ma è più perfetta della opinione, e, di questa, più rigorosa e più pura; essa infatti percorre via via e sviluppa ciò che è indiviso [3] nell'Intelletto, dispiega il groppo della intuizione intellettuale, poi a sua volta raccoglie le cose che ha suddiviso e le riconduce all'Intelletto.

Dal *Pimandro*, traduzione del 1549 in lingua fiorentina

a lui. Gli elementi dalla natura onde vſcirono? PIM. Da la volontá di DIO; laquale auendo abbracciato il Verbo; & ragguardando il bel mũdo; al ſuo eſempio adornó tutte l'altre coſe, de ſuoi propii Elementi, & ſemi vitali. Ma la Mente i DIO pieniſsimo di fecũditá dell'uno & dell'altro ſeſſo, Vita, & Luce, co'l ſuo Verbo partorí vn'altra Mente fattrice. Ilquale certamẽte DIO di fuoco & maeſtá di Spirito, fabbricó dipoi ſette Gouernatori; liquali con li cerchi abbracciano il ſenſibile mondo: & la loro

Dal *Commento al Libro I degli Elementi di Euclide* di Proclo

Cap. VII Scopo dunque del libro è questo: istruire i discenti sugli elementi, in vista dell'intera scienza, e insegnare le particolari costruzioni delle figure cosmiche. Ma questo stesso nome d'*insegnamento elementare*, e lo stesso nome di *elemento*, da cui questa espressione deriva, quale significato avrebbe? Faremo
72 dunque qualche ricerca intorno al titolo. Ora alcuni teoremi di solito sono chiamati *elementi*, altri *elementari*, altri ancora sono definiti al di fuori dell'ambito di questi. Sono chiamati *elementi* quei teoremi la cui teoria conduce alla conoscenza degli altri, e dai quali ci proviene la soluzione dei dubbi che in questi avevamo. Perché, come ci sono dei principii primi, i più semplici e indivisibili del linguaggio scritto, ai quali diamo il nome di «elementi» ed ogni parola ed ogni discorso è formato di questi[35], allo stesso modo ci sono dei teoremi che sono alla testa di tutta la geometria e hanno rapporto di principio coi teoremi seguenti, si applicano in tutti e forniscono la dimostrazione di molti casi particolari; e questi teoremi sono chiamati «elementi». «Elementari» poi sono quei teoremi che si applicano in molti, e sono semplici e ingegnosi, senza però avere dignità di elementi per il fatto che la conoscenza di essi non è comune a tutta la scienza geometrica; come per esempio il teorema che nei triangoli le perpendicolari condotte dai vertici ai lati s'incontrano nello stesso punto[36]. Infine tutti quei teoremi la cui conoscenza non influisce su molti altri, né poi mostrano alcunché di elegante e ingegnoso, cadono al di fuori dell'ambito dei teoremi elementari.

Ma ancora, il termine « elemento » si può usare in due sensi, come dice Menecmo: secondo il primo, ciò che dimostra è elemento di ciò che è dimostrato, così come in Euclide la prima proposizione è elemento della seconda, e la quarta della quinta. Allo stesso modo molte proposizioni possono esser dette elementi le une delle altre, perché si dimostrano fra loro reciprocamente. Così, dal fatto che gli angoli esterni di una figura rettilinea sono uguali a quattro retti, si può dimostrare a quale numero di angoli retti sono eguali gli angoli interni della figura, e reciprocamente. E un tale elemento è una specie di lemma [37]. Ma in altro senso si dice « elemento » la parte più semplice nella quale si risolve il composto. Peraltro non ogni cosa potrà esser detta elemento di un tutto, ma solo le più orginarie fra le cose ordinate in ragione di un risultato, come per esempio i postulati sono elementi dei teoremi. È questo il significato di « elemento » secondo cui Euclide ha coordinato gli *Elementi,* alcuni relativi alla geometria del piano, altri alla stereometria. Nello stesso senso molti autori hanno scritto « trattati elementari » in aritmetica e in astronomia.

Proclo, *Commento al I libro degli Elementi di Euclide* (V sec. d.C.)

Ma basta di questo. Dopo ciò, è necessario distinguere le specie della matematica e dire quali sono e quante di numero; perché, dopo averne considerato il genere nel suo complesso, è necessario, credo, prendere in esame le differenze di specie tra le scienze particolari. Ora, i Pitagorici erano d'opinione di dividere l'intera scienza matematica in quattro parti, di cui una riguardava il « quanto », un'altra il « quanto grande », e ponevano duplice l'una e l'altra; cioè, il « quanto » o ha la sua consistenza in se stesso o è costituito in relazione ad un altro; e il « quanto grande » o è stabile, o si muove. Allora l'aritmetica considera il quanto per se stesso, la musica lo considera rispetto ad un altro quanto; la geometria considera il quanto grande come immobile, la sferica lo considera mobile su se stesso [56]. Essi osservavano poi che il « quanto grande » e il « quanto » non sono né grandezza né pluralità in senso assoluto, ma sono delimitati in un senso e nell'altro; essi pensavano infatti che queste scienze astraessero dall'idea d'infinito, non essendo possibile afferrare con la conoscenza l'infinitudine nei due sensi [57].

Ora, quando queste cose le dicono uomini che hanno raggiunto il culmine della scienza, noi non riterremo di dover intendere che sia da loro immaginato il « quanto » che è negli oggetti sensibili, né il « quanto grande » che riguarda i corpi; perché, io credo, il considerare queste cose è proprio della scienza della natura, non della matematica. Ma poiché il Demiurgo, come c'insegna il *Timeo* [58], prese in mano l'unificazione e la distinzione dell'universo, e la identità con la diversità per il completamento dell'anima, e ad esse aggiunse quiete e movimento, e costituì l'anima di queste specie, si deve dire che la conoscenza ragionata, quando si è costituita e ha capito di essere essa stessa uno e molti, in virtù della sua diversità e della pluralità e distinzione dei rapporti che sono in essa, produce i numeri e la nozione di questi, cioè l'aritmetica; e in virtù della unione del molteplice e della comunione e del legame che lo tiene unito [59], produce la musica. Ed è per questo che l'aritmetica è più antica della musica, perché l'anima, come spiega Platone, viene prima divisa, e poi collegata coi rapporti per opera del Demiurgo. E di nuovo la conoscenza ragionata, fondando la sua propria attività sulla stabilità, emana da sé la geometria, cioè l'unica figura essenziale e i principii creativi di tutte le figure; in virtù poi del movimento, crea la sferica; ché anche questa si muove secondo circoli, ma permane sempre allo stesso modo in virtù delle cause dei circoli, cioè il retto e il circolare. E perciò anche la geometria precede la sferica, come la quiete precede il movimento.

Proclo su Euclide – Ipotesi, postulati ed assiomi. Problemi e teoremi.

Anzitutto dunque, come ho detto, bisognava distinguere i principii e le conseguenze dei principii, ciò che appunto fa Euclide, per così dire, a ciascun libro, facendo precedere a tutta la trattazione i principii comuni a questa scienza. Poi divide gli stessi principii comuni in ipotesi, postulati ad assiomi [42]; perché tutte queste cose differiscono fra loro, né sono la stessa cosa l'assioma, il postulato e l'ipotesi come spiega in un luogo il geniale Aristotele [43]; ma quando una proposizione, ammessa nell'ordine dei principii, sia insieme nota al discente e credibile per se stessa, tale principio costituisce un « assioma », come per esempio, che cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro. Quando invece l'ascoltatore sente affermare una cosa, senza averne la nozione evidente per se stessa, e tuttavia la pone e la concede a chi l'assume, questa proposizione è una « ipotesi »; per esempio, che il circolo è quella figura che è, non l'abbiamo appreso per nozione comune senza insegnamento; pure, sentendolo enunciare, lo ammettiamo senza dimostrazione. Ma quando poi una cosa non è né conosciuta né ammessa dal discente, e tuttavia è assunta, allora, dice Euclide, questo si chiama « postulato », come per esempio che tutti gli angoli retti sono eguali. Ma coloro che si sono ingegnati al massimo per venire a capo di uno dei postulati [44], hanno sperimentato come nessuno riuscisse ad ammetterlo immediatamente. In questo modo dunque, secondo la spiegazione di Aristotele, si distinguono l'assioma il postulato e l'ipotesi. Spesso, però, tutte queste cose sono chiamate ipotesi; così gli Stoici [45] hanno chiamato assioma ogni semplice affermazione; cosicché secondo costoro anche le ipotesi sarebbero assiomi; secondo altri invece, anche gli assiomi sarebbero ipotesi.

A loro volta poi le proposizioni che derivano dai principii si dividono in « problemi » e « teoremi »; i primi comprendono la costruzione delle figure, le sezioni, sottrazioni o aggiunte operate su di esse, e in generale le vicende a cui vanno soggette; gli altri dimostrano le proprietà inerenti per se stesse ad ogni figura. Allo stesso modo infatti che le scienze produttive partecipano della teoria, così anche le scienze teoretiche si annettono dei problemi inerenti alla produzione. Ma già fra gli antichi alcuni come Speusippo e Anfinomo stimarono giusto di chiamarli tutti teoremi, ritenendo che per le scienze teoretiche fosse più adatto l'appellativo di « teoremi » anziché di « problemi », specialmente in quanto esse ragionano di cose eterne; e delle cose eterne non c'è nascita; cosicché in esse neppure troverebbe spazio il problema, il quale annunzia nascita e produzione di ciò che prima non esisteva ancora, come la costruzione del triangolo equilatero o, data una retta, la descrizione del quadrato, o la apposizione di una retta sopra un punto dato. Perciò secondo loro è meglio dire che tutte queste cose esistono [46], e che noi guardiamo la loro formazione non dal punto di vista produttivo ma da quello conoscitivo, come se noi assumessimo come create delle cose che sono sempre; cosicché possiamo dire che le assumiamo tutte dal punto di vista teorico, e non problematico.

A buon diritto dunque si può dire

che i ragionamenti, penetrando in essa e dandole forma, compiono un'opera di produzione; perché il movimento del nostro pensiero, e la proiezione in esso dei suoi propri concetti, sono la genesi, diciamo, delle figure nell'immaginazione e delle proprietà a loro inerenti. È infatti nell'immaginazione che si trovano le loro costruzioni, e le sezioni, e le posizioni, e le applicazioni, e le aggiunte e le sottrazioni, mentre nella conoscenza ragionata tutte le cose sono costituite senza genesi e senza alcun mutamento.

Quando dun-

que si propone di inscrivere nel cerchio un triangolo equilatero, si enuncia un problema; perché è possibile anche inscriverne uno non equilatero; è ancora un problema costruire sopra una retta data terminata un triangolo equilatero, perché è possibile costruirne uno anche non equilatero. Quando invece si enuncia che gli angoli alla base di un isoscele sono eguali, questo si deve chiamare teorema, perché non è possibile che gli angoli alla base degli isosceli non siano uguali.

Ma la scuola

di Zenodoto, il quale riuscì a succedere a Enopide mentre era discepolo di Androne, distingueva il teorema dal problema in quanto il teorema ricerca qual è l'accidente che è predicato della

materia che in esso si tratta, mentre il problema ricerca a quale condizione una cosa esiste.

Ogni scienza presenta due aspetti: da un lato si occupa delle premesse immediate, dall'altro rivolge il suo studio alle cose dimostrate o costruite da quelle premesse, e in genere alle cose conseguenti ai principii. A sua volta questa seconda parte nei ragionamenti geometrici divide la sua attività in soluzione di problemi e scoperta di teoremi; chiamando problemi quelli nei quali si propone di procurare, portare alla luce e costruire ciò che ancora non esiste; teoremi invece, quelli nei quali si stabilisce di vedere riconoscere e dimostrare ciò che si verifica o no. I problemi ci chiedono di escogitare formazioni di figure, e posizioni, e applicazioni, e inscrizioni e circoscrizioni, e sovrapposizioni, e contatti e quant'altre cose del genere, mentre i teoremi si sforzano di afferrare le proprietà e gli attributi inerenti per se stessi agli oggetti della geometria e di avvincerli mediante le dimostrazioni [6]. E, almeno per quanti siano gli oggetti sui quali può aver luogo la ricerca, su tutti quanti la geometria svolge il suo ragionamento, assegnando gli uni ai problemi gli altri ai teoremi. In effetti essa ricerca il « che cosa è » [7], e questo in due sensi: o ne cerca il concetto e la nozione, ovvero l'essere concreto della cosa proposta. Dico, per esempio, come quando chiede che cos'è una linea omeomera. In questa ricerca essa si propone o di trovare la definizione di una tale linea, che cioè la linea omeomera è quella che ha tutte le parti sovrapponibili a tutte, o di cogliere le forme stesse delle linee omeomere, che sono cioè o la retta, o la circolare, o l'elica cilindrica. E oltre a ciò essa ricerca se questa forma esiste per se stessa — e questo soprattutto nei diorismi, esaminando se la cosa cercata con questo mezzo è possibile o impossibile, e fino a che punto e in quante maniere è permessa — e infine chiede anche il « di che qualità è »; perché quando esamina le circostanze accidentali al triangolo, al cerchio e alle parallele, è chiaro che allora essa cerca la qualità [8].